

hihoCoder挑战赛11 题解

清华大学 陈立杰

Contents

1 益智游戏	2
2 交换代数	2
3 高等理论计算机科学	2

1 益智游戏

题目中有一个非常重要的条件，就是这些数是随机生成的。

不妨令 $d(x)$ 表示 x 的因子个数，那么我们有以下结论：

$$d(xy) \leq d(x) \cdot d(y).$$

因为每个 xy 的因子都必然是一个 x 的因子乘以一个 y 的因子，小于等于号是因为可能重复计数。

这提示我们，如果两个数 x, y ， $d(x), d(y)$ 都非常小，那么在随机的情况下，这两个数就几乎不可能成为答案。

同时如果我们生成一些随机数，可以发现大部分的 d 值都很小。

所以我们不妨只保留 A 中 d 值最大的1000个数，然后进行平方的暴力，实践表明，这样的算法就能通过数据了。

2 交换代数

不妨假定颜色的序列是 a_1, a_2, \dots, a_n 。

我们再额外添加两个球： a_0 和 a_{n+1} ，并且 $a_0 = a_{n+1} = 0$ 。

通常对于区间翻转，我们很容易想到做差，我们不妨令 $d_i = a_i \text{ XOR } a_{i+1}$ 。

我们考虑一次操作，翻转 a_i, a_{i+1}, \dots, a_j 。容易发现只有两个 d ， d_{i-1} 和 d_j 的值发生了改变。

同时可以发现 a_1, \dots, a_n 都等于0，等价于 d_0, \dots, d_n 都等于0。

那么通过这一步转化，问题就变成了，每次在 d_0, \dots, d_n 中随机选择两个位置 $i-1$ 和 j ，并且将他们翻转，问变为全0的期望时间。

此时所有位置都是一样的了，我们只需要记录 d 序列中0的个数就可以了。

不妨令 ans_{cnt} 表示有 cnt 个0的话，变为全0的期望时间。

注意到 cnt 经过一步操作，可能转移到 $cnt-2, cnt, cnt+2$ 中的一个，转移的概率是很容易计算的，我们就可以列出关于 ans 的方程组。

那么使用 $O(n^3)$ 的高斯消元，就能计算出 ans_{cnt} ，从而解决这个问题了。

题外话

实际上通过更加仔细的分析，可以得出一个 $O(n)$ 的做法，但是你可以发现，在这个问题中，随着 n 的增大，答案变大的非常快， $n=30$ 时就已经超出了double的范围了，所以题目中的 n 才比较小。

3 高等理论计算机科学

让我们不妨考虑使用点分治来解决问题。

假设我们当前选择了分治点 u 。

那么所有的路径可以被我们分成两类：

- 经过点 u 的。令这些路径集合为 A 。
- 不经过点 u 的。令这些路径集合为 B 。

那么同样我们就需要处理三种问题。

- A 中的路径与 A 中的路径。由于它们都经过点 u ，显然它们都相交。
- A 中的路径与 B 中的路径。有待解决。
- B 中的路径与 B 中的路径。删除 u 之后， B 中的路径都落在某个子树内，只有相同子树内的才可能相交。递归处理这些子树即可。

由上可知第一种和第三种都比较简单，所以我们需要处理第二种。

将 u 作为整个树的根。对于 B 中路径 b 和 A 中路径 a ，我们可以发现 a 和 b 相交，当且仅当 b 的两个端点的LCA(最低公共祖先)处于 a 上。这是因为该LCA当然在路径 b 上，所以它在 a 上的话 a 和 b 自然相交。又若该LCA不在 a 上，那么整个路径 b 都在该LCA的子树里，自然也无法和 a 相交。

那么我们对于每个 B 中路径 b ，我们求出其两个端点的LCA： L ，然后给 L 这个点的点权加1。那么路径 a 上所有点的权值和，就自然是和它相交的 B 中路径的个数了。

考虑复杂度，如果使用Tarjan算法求LCA，可以认为处理一个大小为 n 的子树的分治的时间是 $O(n)$ 的。所以总共的时间复杂度就是 $O(n \log n)$ ，当然时间限制并不紧，使用 $O(n \log^2 n)$ 的算法也可以通过数据。