hiho 挑战赛 Solution

jcvb

May 14, 2016

1 Boxes

这是一道非常容易的题目。

从上往下开箱子的时候，如果发现这堆的底下已经没有宝箱了，就可以不用再管这堆了。

容易看出最优策略是先把其中第 x 堆的宝箱都带走，中途遇到的没用的箱子放到另一个地方。然后去开其他堆中的宝箱，并把没用的箱子丢到第 x 堆。

为了让步数最少，只要使开第 x 堆时遇到的无用箱子数目最少就可以了。

2 LIS

这是一道比较容易的 DP 题。

由于值域只有 0 和 1，可以令状态为 $f[i][l_0][l_1]$，表示当前在从左到右第 i 个位置，之前以 0 结尾的答案最长长度是 l_0，之前以 0 或 1 结尾的答案最长长度是 l_1 的方案数。如果第 $i+1$ 位是 0，就转移到 $f[i+1][l_0+1][\max\{l_0+1, l_1\}]$；如果第 $i+1$ 位是 1，就转移到 $f[i+1][l_0][l_1+1]$。

最后只要对所有 $f[n][l_0][l_1] \times l_1$ 求和即可。

这个 DP 是 $O(n^3)$ 的。

3 Sequence

先来考虑一个排列可到达的条件是什么。

如果不是 n 排列，而是 01 序列的话，那么条件是显然的：只要对于任意 i，序列 b 的第 i 个 1 都位于序列 a 的第 i 个 1 的右边（不一定严格），那么 a 就可以到达 b。

对于一个 n 排列 a，以及一个数 k，把 a 中大于 k 的数标为 1，剩下的数标为 0，就能得到一个 01 序列。如果对于任意的 k，排列 a 对应的 01 序列都能够到达排列 b 对应的序列，那么排列 a 就可以到达排列 b。它的必要性是显然的。至于充分性，可以观察下面这个移动策略：i 从 n 到 1 的顺序，每次将数字 i 移到它的目标位置，令当前位置为 l，目标位置为 r，当前 $(l, r]$ 区间的最大数字为 $a[j]$，那么把 $a[l]$ 和 $a[j]$ 交换一下即可。容易看出这样移动一定是可行的。

那么只要做一个 01 串 DP：从一个全 0 的串开始，每次转移是将串中的某个 0 改为 1，最后到达一个全 1 的串，且保证经过的都是合法 01 串。

这个 DP 是 $O(n2^n)$ 的。

4 Polynomial

由于多项式次数为 $n-1$，所以 n 个点值是可以唯一确定这个多项式的。设输入的多项式是 $f(x)$，由点值确定的这个多项式是 $g(x)$，我们的任务就是判断 $f(x) \equiv g(x)$ 是否成立。

直接求出 $g(x)$ 的各项系数是比较困难的，但对于某一个 x_0 求出 $g(x_0)$ 的值是可以做到的，只要用 Lagrange 插值公式即可，

$$g(x_0) = \sum_{0 \le i < n} g(i) \cdot \frac{\prod_{0 \le j < n, j \ne i}(x_0 - j)}{\prod_{0 \le j < n, j \ne i}(i - j)}.$$

分子部分可以使用前缀积、后缀积来计算，分母可以用预处理阶乘的乘法逆元来计算。一次计算 $g(x_0)$ 的复杂度是 $O(n)$。

所以可以考虑使用随机化算法，每次从 $0, 1, 2, \cdots, p-1$ 中随机挑选一个 x_0，比较 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$ 的值是否相等。

来看一下这个做法是否靠谱：如果 $f(x) \equiv g(x)$，则任意 x_0 代入的值都相等；否则至多有 $n-1$ 个这样的 x_0，它们是 $f(x) - g(x)$ 的根。那么一次误判成相等的概率不超过 $(n-1)/p$。如果 p 很小的话显然是不行的。

一个解决办法是将 x_0 的选取范围强行扩大。取一个 p 的非二次剩余 w，考虑 $a + b\sqrt{w}$ 组成的域 F_{p^2}，在这之中随机选一个 x_0 进行检验。那么一次误判的概率就只有 $(n-1)/p^2$ 约等于 $1/p$ 了。

这道题也有许多其他做法是可以通过的。