

hihoCoder Challenge 9 Solutions

March 1, 2015

1 Good Matrix

DP。固定 m ，令 $f(n, a, b)$ 为前 n 行已经填好，其中有 a 列和为0， b 列和为1的方案数。那么和为2的列有 $m - a - b$ 个。考虑第 $i + 1$ 行放的数，必然是恰好是以下情况中的一种：(1) 全0 (2.1) 1个1，在某个原先和为0的列中(2.2) 1个1，在某个原先和为1的列中(3.1) 2个1，两列原先和为0 (3.2) 2个1，一列原先和为0，一列原先和为1 (3.3) 2个1，两列原先和为1 (4) 1个2。对于每种情况分别转移即可。

对于每个 m ，复杂度三方。总复杂度四方。

2 Good String

考虑如下的贪心过程：

找到最小的 i 使得 $s_i s_{i+1} \dots s_n s_1 \dots s_{i-1}$ 的字典序不严格大于 s 。

如果不存在这样的 i 测 s 是超好串，结束。

那么可以证明 $s_1 s_2 \dots s_{i-1}$ 一定是一个超好串。

这样我们从 s 中删除 $s_1 s_2 \dots s_{i-1}$ 。

对剩下的串重复以上过程。

以上过程给出了 s 的一个分解。容易证明这样的分解一定是好分解。

所以我们只需要考虑快速求出 i 。以下是一个算法。

初始时令 $l = 1, r = 2$ 。

循环进行以下判断：

如果 $s_l = s_r$ ，则 $l + = 1, r + = 1$ 。

如果 $s_l < s_r$ ，则 $l = 1, r + = 1$ 。

如果 $s_l > s_r$ ，则 $i = r - l + 1$ 并结束。

边界条件需要稍微考虑一下。容易看出以上过程一定求出最小的 i (采用反证法)。

注意如果直接将两个过程拼起来，在原串是很多个相同的串的连接的时候复杂度会变成平方，所以需要稍微注意一下这里的处理方法。

题外话：本题中超好串在学术界被称为Lyndon word。所求的好分解被称为Lyndon factorization。这样的分解事实上是唯一的，所以本题没有special judge。

3 Good String

对于每个 $1 \leq i \leq n$ 。令 $l_i = i - a_i$, $r_i = \min\{k : k > i, k - i + 1 \leq a_k\}$ 。
(如果不存在，则取自然的定义。)

那么我们知道 $b_{l_i} > b_i$ 且 $b_{r_i} > b_i$ 。

如果 $b_{l_i} > b_{r_i}$ ，则从 i 向 r_i 连一条边。

如果 $b_{r_i} > b_{l_i}$ ，则从 i 向 l_i 连一条边。

注意到 b_{l_i} 和 b_{r_i} 的大小关系由 a 数组唯一确定，我们可以在只知道 a 的情况下建出图。

那么除了 $b_i = n$ 的 i 之外，每个 i 都有唯一的出边(称为 p_i)，且确定 $b_{p_i} > b_i$ 。
那么如果这个图有环，一定不存在合法的 b 数组。

如果这个图没有环，则一定是一棵树。并且可以证明，如果树边的大小关系都满足，那么所有的 a_i 都满足。

所以答案为这个树确定的偏序的线性扩展(linear extension)的个数。这个结果是经典的，答案为 $\frac{n!}{\prod_i \text{以 } i \text{ 为根的子树的大小}}$ 。