# 1 A

对一个有 $i$ 个孩子的节点进行一次操作联通块会增加 $i$ 个。01 背包一下就好了。

时间复杂度 $O(n^2)$。

# 2 B

令 $f_{l,r}$ 为区间 $[l,r]$ 作为一个子树的方案数，为了辅助，令 $g_{l,r}$ 为区间 $[l,r]$ 作为一个还未完成的子树的方案数（只放入了一部分的儿子还能再它背后加儿子）。

区间 DP，对于区间 $[l,r]$，枚举它的最后一个孩子 $k$。那么区间 $[l,k-1]$ 的方案数就是 $g_{l,k-1}$，区间 $[k,r]$ 的方案数为 $f_{k,r}$。如果 $B_k=0$ 那么累加到 $f_{l,r}$ 否则累加到 $g_{l,r}$。

一些细节就不细说了，时间复杂度 $O(n^3)$。

# 3 C

只要考虑所有长度为 3 的等差数列就可以了。

考虑枚举这个等差数列的中间节点 $k$，那么剩下两个数有两种情况。

1) 一个点在子树内一个点在子树外。

2) 两个点在不同的孩子的子树中。

对于第一种情况，我们把这两个点放到放到 DFS 序中，就是一个数在区间 $[l_k,r_k]$ 中，剩下一个数在区间外。

考虑 bitset，假设已经知道了 $[l_k,r_k]$ 内外数的出现情况的 bitset，只要左移一下 and 一下就可以得到以 $k$ 为中间节点有多少个公差出现过，把每一个节点的答案 bitset 或起来就行了。

现在我们需要知道区间 $[l_k,r_k]$ 内外各有多少数出现过，这个是一个经典的莫对问题。

对于第二种情况，可以发现这个时候只和子树内部的节点有关，这处理起来就非常方便了。

我们可以直接使用启发式合并，对每一个节点使用一个 map 记录子树内所有节点的权值，合并两个子树的时候就暴力把较小的那个子树中的所有节点插入到较大的那个子树中，并在这个时候查找是否存在节点能和它组成等差数列，如果能就更新答案。

时间复杂度 $O(n\sqrt{n}+\frac{n^2}{w}+n\log^2 n)$。

# 4 D

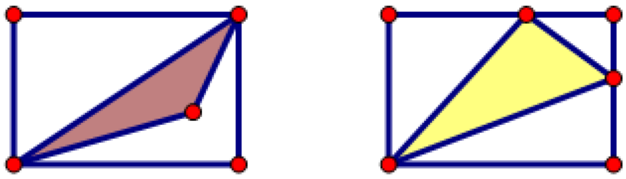
Pick 定理：如果一个多边形的所有端点都是整点，那么有 $S=a+\frac{b}{2}-1$，其中 $a$ 表示多边形内部的点数，$b$ 表示多边形边界上的点数，$s$ 表示多边形的面积。

所以可以发现只要是面积等于 $\frac{1}{2}$ 的三角形都满足题目中的条件。

考虑枚举框住三角形的矩形的长宽，那么显然肯定有一个点在矩形的角上，不妨令这个点是左下角，那么有两种情况：

1) 存在另一个点落在对角顶点。

2) 剩下两个点分别落于相对的两条边上。



设矩形的大小为 $n \times m$。

不妨先考虑第二种情况，设剩下两个点的坐标为 $(a, m)$ 与 $(n, b)$。那么三角形的面积 $S = \frac{|ab-nm|}{2}$，所以 $ab = nm - 1$。

不难发现当 $n \leq 1, m \leq 1$ 时，$a \neq n, b \neq m$ 不可能同时成立。

因此第二种情况的三角形都不满足条件，只需要考虑第一种就可以了。

设第三个点的坐标为 $(a, b)$，那么三角形 $S = \frac{|am-nb|}{2}$，即 $am - nb = 1$ 或 $am - nb = -1$，这两个方程的解释对称的，因此只需要考虑其中一个方程就可以了。

方程 $am - nb = 1$ 有解当且仅当 $(n, m) = 1$，同时存在 $x0, y0$，使得所有满足条件的解都可以表示为：

$$\begin{cases} a = x0 + kn \\ b = y0 + km \end{cases}$$

所以在矩形内部的解至多只有一个。同时，观察方程可以发现第三个点能落在边界上当且仅当 $n = 1$ 或 $m = 1$，这种情况下都恰好只有一个合法解，接下来考虑 $n > 1$ 且 $m > 1$ 的情况。

不难发现一定存在一个解满足 $a \in [0, n)$，又 $nb = am + 1$，因此 $1 \leq nb < nm + 1$，于是有 $b \in (0, m]$。因此方程 $am - nb = 1$ 总是恰好有一个合法解。

所以对于任意互质的 $n, m$，都框定了四个（两个方程同时轴有两种位置）三角形。接着我

们可以进行一系列推导：

$$
\begin{aligned}
\text{ans} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} 4(n-i)(m-j)[(i,j)=1] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 4(n-i)(m-j)\sum_{k|(i,j)}\mu(k) \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}(n-ki)\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{m}{k}\rfloor}(m-ki) \\
&= 4nm\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\lfloor\frac{m}{k}\rfloor - 4\sum_{k=1}^{n}\mu(k)k(\lfloor\frac{m}{k}\rfloor m\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor} i + \lfloor\frac{n}{k}\rfloor n\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{k}\rfloor} i) + 4\sum_{k=1}^{n}\mu(k)k^2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor} i\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{k}\rfloor} j
\end{aligned}
$$

因为 $(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor, \lfloor\frac{m}{i}\rfloor)$ 的取值只有 $O(\sqrt{n}+\sqrt{m})$ 个，所以我们可以枚举这些取值，然后就只需要算以下三个函数的点值就可以了，这可以使用杜教筛递归求解。

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \sum_{k=1}^{n}\mu(k) = 1-\sum_{k=2}^{n}A(\lfloor\frac{n}{k}\rfloor) \\
B(n) &= \sum_{k=1}^{n}\mu(k)k = 1-\sum_{k=2}^{n}kB(\lfloor\frac{n}{k}\rfloor) \\
C(n) &= \sum_{k=1}^{n}\mu(k)k^2 = 1-\sum_{k=2}^{n}k^2C(\lfloor\frac{n}{k}\rfloor)
\end{aligned}
$$

按照上述式子递归求解函数值即可，时间复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}})$。